

# トナー表面電荷による静電付着力の解析

栗 林 夏 城<sup>\*、1</sup>

(2011年1月25日受付; 2011年3月31日受理)

## Analysis of Electrostatic Force Induced by Charge on Toner Surface

Natsuki KURIBAYASHI<sup>\*、1</sup>

(Received January 25, 2011; Accepted March 31, 2011)

Electrostatic force between two spherical positively charged toners is calculated by two methods, a multipole expansion method and boundary element method (BEM). The calculation results show that interactive force between two toners is attractive for small distance, if their surfaces are charged not uniformly but locally. This attractive force is caused by the localized charge on one toner inducing polarization charge on the other toner located closely. This suggests that toners can cohere by this attractive force on photoconductor surface. Additionally, the calculation results for the adhesive force between a charged toner and grounded plane can explain the corresponding experimental data.

### 1. はじめに

電子写真の画像形成材料であるトナーは粒径数ミクロンの帯電した微粒子で、個々のトナー粒子は主に静電気力によって感光体上に現像される。そして感光体上で画像として顕在化するにはそれらは凝集した状態で保持されている。このときのトナー粒子と感光体との間に働く付着力や、同極性であるトナー粒子間に働く付着力（凝集力）については従来より多くの議論があった。その中には微粒子であるトナーと感光体表面間あるいはトナー粒子間の van der Waals 力（分子間力）が支配的との考え方もあったが、この場合には粒子間の間隙が数 nm 以下である必要がある。電子写真の転写プロセスではトナーが強く圧縮されてそのような場合も考えられるが、現像プロセスにおいては考えにくい。

既報<sup>1)</sup>ではトナー粒子表面が一様ではなく局所的に帯電している<sup>2,3)</sup>とすると、同極性の2つのトナー粒子間でも一方のトナー表面上の局所電荷が、近接するもう一方のトナーの樹脂などの部分を誘電分極させ引力が働く可能性を示し、図1のようなトナー凝集が起こり得ることを示唆した。すなわち、付着力（凝集力）は主に静電気力であると考えられることができる。しかし、その解析は多重極展開の方法を

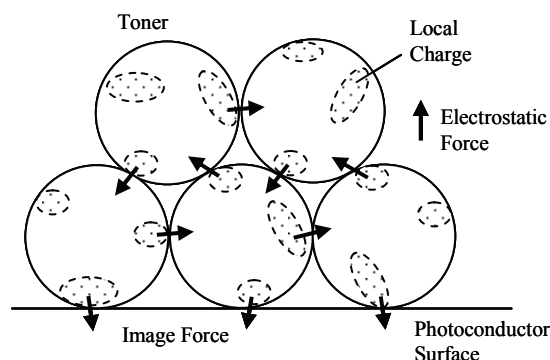


図1 感光体上に現像されたトナー  
Fig.1 Developed toner particles on PC surface.

用いており、軸対称の電荷分布の場合しか扱えなかった。

本報告ではトナー粒子表面が任意の電荷分布を持つ場合にも対応できるよう境界要素法を用いて静電界を解析し静電気力による付着メカニズムを示した。最初に軸対称電荷分布の場合の解析結果の概要を示して、次に局所的な電荷分布の場合の解析結果を示す。なお、トナーは正帯電した球形の誘電体として扱っているが、負帯電としても静電界の向きが逆になるだけで付着力は同じである。

### 2. 多重極展開の方法によるトナー（軸対称電荷分布）間の静電気力の解析

軸対称の静電界は多重極展開の方法を用いてほぼ解析的に計算することができる。

#### 2.1 多重極展開法による静電界の計算方法

まず、1つの誘電体球について考える。球の半径を  $R$ 、誘電率を  $\epsilon$ 、球外の誘電率を  $\epsilon_0$  (= 真空の誘電率) とする。電荷は球面上にのみ存在して空間に電荷がないので、静電

キーワード: トナー, 付着力, 表面電荷, 多重極展開, 境界要素法

\* (株)リコー 研究開発本部 基盤技術研究センター  
(224-0035 神奈川県横浜市都筑区新栄町 16-1)  
Research and Development Group, Ricoh Company, Ltd.,  
16-1 Shinei-cho, Tsuzuki-ku, Yokohama-shi, Kanagawa  
224-0035, Japan

<sup>1</sup> natsuki.nk.kuribayashi@nts.ricoh.co.jp

界は3次元 Laplace 方程式で表わされる。誘電体球の中心を原点とした極座標系でさらにz軸対称の場合は式(1)となり、静電ポテンシャル $\phi$ の一般解(級数解)は式(2)となる。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\phi(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left( A(j) r^j + \frac{B(j)}{r^{j+1}} \right) P_j(\cos \theta) \quad (2)$$

ここで、 $P_j(\cos \theta)$ は Legendre 多項式、 $A(j)$ 、 $B(j)$ は展開係数である。原点( $r=0$ )と無限遠( $r=\infty$ )で電位 $\phi$ が発散しないためには球内部での解は $r^j$ のみを含む項、球外部では $1/r^{j+1}$ のみを含む項となり、以下のように表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{in}(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} A(j) r^j P_j(\cos \theta) \quad (r < R) \\ \phi_{out}(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B(j)}{r^{j+1}} P_j(\cos \theta) \quad (r > R) \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{in}(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} A(j) r^j P_j(\cos \theta) \quad (r < R) \\ \phi_{out}(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B(j)}{r^{j+1}} P_j(\cos \theta) \quad (r > R) \end{array} \right. \quad (4)$$

球面上の軸対称に分布した電荷密度 $\sigma(\theta)$ は境界条件に組み込まれる。誘電体境界面の静電界の接続条件は次式であり、

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \mathbf{E}_{out} \cdot \mathbf{n} - \varepsilon \mathbf{E}_{in} \cdot \mathbf{n} = \sigma(\theta) \\ \mathbf{E}_{out} \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_{in} \times \mathbf{n} \end{array} \right. \quad (5)$$

これを使うと球面での境界条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi_{out}}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \phi_{in}}{\partial r} = \sigma(\theta) \quad (r = R) \\ \phi_{out} = \phi_{in} \quad (r = R) \end{array} \right. \quad (7)$$

となる。上式に式(3)(4)を代入すると次式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_0 \frac{j+1}{R^{j+2}} B(j) P_j(\cos \theta) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon A(j) j R^{j-1} P_j(\cos \theta) = \sigma(\theta) \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B(j)}{R^{j+1}} P_j(\cos \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} A(j) R^j P_j(\cos \theta) \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B(j)}{R^{j+1}} P_j(\cos \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} A(j) R^j P_j(\cos \theta) \quad (10)$$

次に、上式の両辺に $P_j(\cos \theta)$ を乗じて $-1 < x = \cos \theta < 1$ について積分すると、Legendre 多項式の直交性

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (x = \cos \theta) \quad (11)$$

を使って次式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \frac{j+1}{R^{j+2}} B(j) + \varepsilon j R^{j-1} A(j) \\ = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 \sigma(\theta) P_j(\cos \theta) d(\cos \theta) \\ B(j) = R^{2j+1} A(j) \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \end{array} \right. \quad (12)$$

$$B(j) = R^{2j+1} A(j) \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

上式から展開係数 $A(j)$ 、 $B(j)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ )が直接求められ、静電ポテンシャル $\phi_{in}$ 、 $\phi_{out}$ が決定される。

## 2.2 多重極再展開法による静電界の計算方法

次に、半径 $R_1$ 、 $R_2$ 、誘電率 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ の2つの球の表面電荷密度が $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ のときの静電界を計算し、球面上で Maxwell の応力を算出して2球の間の力を求める。

図2に示すような2つの誘電体球の作る球外の静電ポテンシャル $\phi_{out}$ は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \phi_{out} &= \phi_{1-out}(r_1, \theta_1) + \phi_{2-out}(r_2, \theta_2) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_1(j)}{r_1^{j+1}} P_j(\cos \theta_1) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_2(j)}{r_2^{j+1}} P_j(\cos \theta_2) \end{aligned} \quad (14)$$

上式は2つの極座標系が混在した表式となっているため、どちらか一方の極座標系に統一しておく必要がある。多重極再展開法<sup>4-6)</sup>はこの変換公式( $r_1, \theta_1$ ) $\leftrightarrow$ ( $r_2, \theta_2$ )を与えるもので次式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_1^{k+1}} P_k(\cos \theta_1) = (-1)^k \frac{1}{S^{k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!k!} \left( \frac{r_2}{S} \right)^j P_j(\cos \theta_2) \\ \frac{1}{r_2^{k+1}} P_k(\cos \theta_2) = \frac{1}{S^{k+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!k!} \left( \frac{-r_1}{S} \right)^j P_j(\cos \theta_1) \end{array} \right. \quad (15)$$

ここで、 $S$ は2球の中心間距離で、式(15)は $r_2 < S$ 、式(16)は $r_1 < S$ の範囲で成立する。

そこで、球1内部の電位 $\phi_{1-in}$ 、球2内部の電位 $\phi_{2-in}$ 、球1と球2の外部の電位 $\phi_{out}$ (2通り)は次式で与えられる。

$$\phi_{1-in}(r_1, \theta_1) = \sum_{j=0}^{\infty} A_1(j) r_1^j P_j(\cos \theta_1) \quad (r_1 < R_1) \quad (17)$$

$$\phi_{2-in}(r_2, \theta_2) = \sum_{j=0}^{\infty} A_2(j) r_2^j P_j(\cos \theta_2) \quad (r_2 < R_2) \quad (18)$$

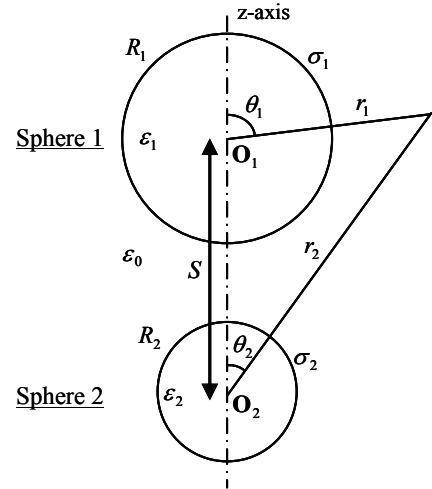


図2 2つの誘電体球と極座標系 $\mathbf{O}_1$ 、 $\mathbf{O}_2$

Fig.2 Spherical coordinate systems for  $\mathbf{O}_1$  and  $\mathbf{O}_2$  with two dielectric spheres.

$$\phi_{out}(r_1, \theta_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_1(j)}{r_1^{j+1}} P_j(\cos \theta_1) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_2(k) \frac{1}{S^{k+1}} \frac{(j+k)!}{j!k!} \left(\frac{-r_1}{S}\right)^j P_j(\cos \theta_1) \quad (19)$$

$$\phi_{out}(r_2, \theta_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_2(j)}{r_2^{j+1}} P_j(\cos \theta_2) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} B_1(k) \frac{(-1)^k}{S^{k+1}} \frac{(j+k)!}{j!k!} \left(\frac{r_2}{S}\right)^j P_j(\cos \theta_2) \quad (20)$$

球面1, 球面2上での境界条件は式(7)(8)と同様となり, これに上式(17)-(20)を代入する. 例えば,  $r_1 = R_1$ における境界条件への代入では  $r_1 < S$  ゆえ, 式(16)が成り立ち式(19)を使うことができる. そして前項と同様の手続きを取り展開係数に関する関係式を得る. この際に, 式(17)-(20)を  $N+1$ 項で近似するとすれば, 展開係数  $A_1(j), B_1(j), A_2(j), B_2(j)$ を未知数とする  $4(N+1)$ 個の連立1次方程式が得られ, それを解くことで静電ポテンシャル  $\phi_{1-in}, \phi_{2-in}, \phi_{out}$  が決定される.  $N$ を増すほど精度が高まるが, 以下の計算例では最終的な付着力の計算値は  $N = 50$ 程度でほぼ収束(8桁一致)する. 計算時間は1秒以内である.

### 2.3 トナー間付着力の計算結果

2つの球形トナーを考慮して,  $R_1 = R_2 = 4 \mu\text{m}$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 3$ (比誘電率), トナー間隙である  $\text{gap} = S - (R_1 + R_2) = 0-10 \mu\text{m}$ の場合で計算した. トナー球面上の電荷密度は,  $\sigma(\theta) = \sigma(\cos \theta)$ とすることで式(12)の被積分関数は  $x = \cos \theta$ のみで表わされて積分範囲は  $-1 < x < 1$ になる. そこで Gauss 積分(積分点64)を使うことができる.  $Q/M = 20 \mu\text{C/g}$ としてトナー1個の電荷量  $Q$  ( $M$ はトナー質量, トナーの比重は1.1)を決めて, 電荷分布を次式のように設定した.

$$\begin{cases} \sigma(x) = \sigma_{\max} f(x) & x = \cos \theta & (21) \\ f(x) = (x \pm 1)^4 / 16, (x \pm 1)^{12} / 4096 \\ Q = \int_0^\pi \sigma(\theta) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \sigma_{\max} \int_{-1}^1 f(x) dx & (22) \end{cases}$$

分布関数  $f(x)$  はトナー球の北極(正符号の場合)または南極(負符号の場合)の周辺に電荷が集中するように試行的に与えたものである.  $f(x)$  と  $\sigma_{\max}$ を図3に示した.

2つの球の南極または北極に式(21)のように電荷を集中させたモデルで静電界を計算し, 球面1上の Maxwell の応力を算出して球1に働く力  $F_z$ を求めた. 計算結果を図4に示した. 2つの球の間には  $F_z < 0$ のときに引力,  $F_z > 0$ のときには斥力が働くことになる. また, 計算モデルも図4中に示した.

計算モデル①は球1の南極に電荷が集中して球2は帯電していない場合であるが, 引力が働いていることがわ

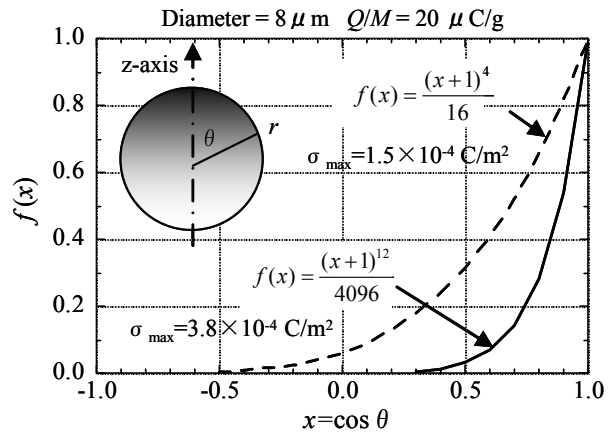


図3 トナー球面上の軸対称電荷分布  
Fig. 3 Axisymmetric charge distribution on toner surface.

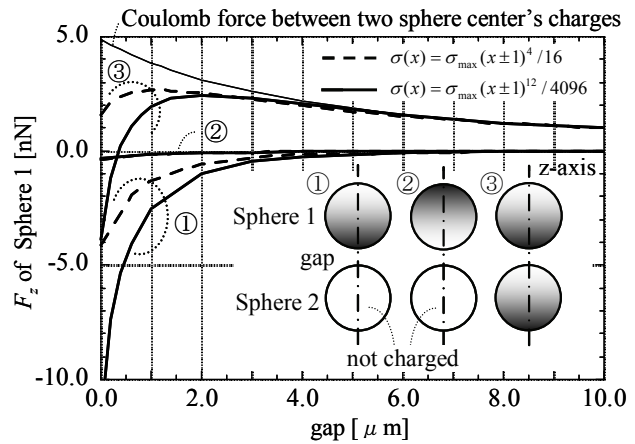


図4 2つのトナー間の静電気力  
Fig. 4 Electrostatic force of two toner particles.

かる. 球1の北極に電荷が集中している場合(計算モデル②)でも小さいが引力が働いている. この理由は球2が誘電分極してこの分極電荷と球面1上の真電荷との間で引力が働くため, 当然のことながら  $\epsilon_2 = 1$ とすると  $F_z = 0$ となる.

計算モデル③は球1, 球2とも南極に電荷が集中している場合であるが,  $(x-1)^{12}/4096$ 分布の場合は  $\text{gap} < 0.4 \mu\text{m}$ で引力が働いている. 図4には球面電荷を中心の点電荷に集約したときの2点電荷間クーロン力(中心の点電荷近似)も示しているが, 計算モデル③では  $\text{gap}$ が大きくなると電荷分布の構造が見えなくなり2点電荷間のクーロン斥力に漸近する.

式(21)で与えた表面電荷分布は実際のトナーとは異なると考えられるが, 同極性トナーであっても表面の電荷分布によっては  $\text{gap}$ の小さいところで引力が働く場合があることがわかった. したがって, 図1で示したようなトナーの凝集モデルが成り立つ可能性がある.

### 3. 境界要素法によるトナー (任意電荷分布) 間の静電気力の解析

実際のトナーに近いと考えられる表面電荷分布を仮定して, 静電的付着力を境界要素法により計算する.

#### 3.1 境界要素法による静電界の計算方法

3次元 Laplace 方程式は, Green の定理を用いて領域での体積積分をそれを囲む閉曲面 (境界面) 上の面積分に変換することにより, 境界面上の境界積分方程式で表すことができる<sup>7)</sup>. 静電ポテンシャルを  $u(x,y,z)$  とし次式となる.

$$c_i u_i - \frac{1}{4\pi} \int_S u \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} dS = \frac{1}{4\pi} \int_S q \frac{1}{r} dS \quad (23)$$

$$r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \quad (24)$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \frac{\partial u}{\partial z} n_z \quad (25)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \nabla r \cdot \mathbf{n} = \frac{x-x_i}{r} n_x + \frac{y-y_i}{r} n_y + \frac{z-z_i}{r} n_z \quad (26)$$

ここで,  $\mathbf{r}$  は境界上の積分変数,  $\mathbf{r}_i$  は境界上の定点でソース点と呼ばれる (図5(a)参照).  $\mathbf{n}$  は境界上の外向き法線単位ベクトルである.  $q$  は境界上でのポテンシャルの外向き法線方向微分で流束である. 式(23)は境界上のポテンシャル  $u$  と流束  $q$  の関係を表わしたものである. また,  $u_i$  はソース点  $\mathbf{r}_i$  におけるポテンシャルの値  $u(\mathbf{r}_i)$  である. 積分点がソース点と一致するとき  $r = 0$  となり積分は特異となるが, この特異積分は有限の値を持つ. その際に現れる係数を  $c_i$  としている.

領域  $V$  を囲む境界面  $S$  (閉曲面) を4辺形8節点要素 (2次要素) でメッシュ分割して離散化すると (図5(b)参照), 境界面上の積分は境界要素  $\Delta$  上の積分の和として表わされ, 式(23)は次式(27)となる.

$$c_i u_i - \frac{1}{4\pi} \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \left[ \left( \sum_j N_j u_j \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right] dS = \frac{1}{4\pi} \sum_{\Delta} \int_{\Delta} \left[ \left( \sum_j N_j q_j \right) \frac{1}{r} \right] dS \quad (27)$$

ここで,  $u_j, q_j$  は節点  $j$  ( $j=1 \sim N$ : 節点数) におけるポテンシャル, 流束である. 要素内部では  $u, q$  を形状関数 (内挿関数)  $N_j$  を用いて表している.  $u_i$  はソース点である節点  $i$

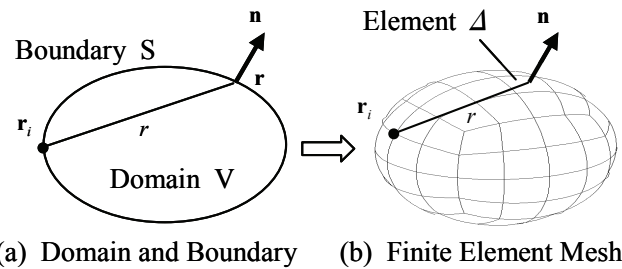


図5 領域  $V$  とそれを囲む境界面  $S$

Fig. 5 Boundary  $S$  surrounding Domain  $V$ .

におけるポテンシャルの値である. 式(27)は次のように書くことができる.

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (28)$$

$$\hat{H}_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Delta} N_j \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} dS \quad (29)$$

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta} N_j \frac{1}{r} dS \quad (30)$$

ソース点  $i$  を  $i=1 \sim N$  ( $N$ : 節点数) まで変えると, 式(28)は  $N$  個の方程式となりマトリックスの形で書くと,

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{Q} \quad (31)$$

$$\begin{cases} H_{ij} = \hat{H}_{ij} \quad (i \neq j) \\ H_{ii} = c_i + \hat{H}_{ii} \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} H_{ij} = \hat{H}_{ij} \quad (i \neq j) \\ H_{ii} = c_i + \hat{H}_{ii} \end{cases} \quad (33)$$

となる.

ベクトル  $\mathbf{U}$  の成分は  $u_j$ , ベクトル  $\mathbf{Q}$  の成分は  $q_j$ , マトリックス  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}$  の成分は式(29) (30) (32) (33)で与えられる. 式(29) (30)は境界面を離散化した要素内での積分を計算することで求められる. ソース点が積分する境界要素に含まれるときは,  $r=0$  となり特異積分を数値計算する必要があるが, それには文献 8) の方法を用いた.

3次元 Laplace 方程式は境界条件として境界面におけるポテンシャルまたはその勾配 (流束) が与えられているので, 式(31)では境界上の節点  $j$  において, ポテンシャル, 流束の一方が既知で他方が未知である. そこで, 式(31)の  $\mathbf{U}$  ベクトル,  $\mathbf{Q}$  ベクトルの成分の中で未知数のみを取り出して, マトリックスを組み替えることで, 次のような  $N$  個の連立1次方程式が得られる.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (34)$$

未知ベクトル  $\mathbf{x}$  の成分は  $u_j$  または  $q_j$  である.

$\mathbf{H}$  マトリックスの対角成分 (= 式(33)) は未知の係数  $c_i$  を含んでいるが, これは以下のような方法で間接的に求めることができる.

領域内および境界上で一様なポテンシャル  $u_0$  は Laplace 方程式の解である (一様ポテンシャル条件). そのとき流束  $q = 0$  となるので, 式(28)に  $u_j = u_0, q_j = 0$  を代入すると,

$$\left( c_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \right) u_0 = 0 \quad (35)$$

が得られる. したがって, 式(32)(33)より  $\mathbf{H}$  マトリックスの対角成分を

$$H_{ii} = c_i + \hat{H}_{ii} = -\sum_{j \neq i}^N \hat{H}_{ij} \quad (36)$$

として求めることができる.

次に図6のように2つの異なる誘電率  $\epsilon_1, \epsilon_2$  の領域  $V_1$ ,



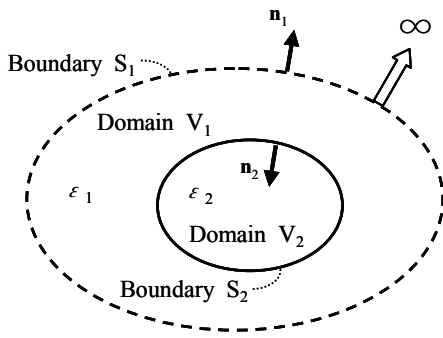


図6 2つの領域 \$V\_1, V\_2\$ とそれらを囲む境界面 \$S\_1, S\_2\$  
Fig. 6 Boundary \$S\_1, S\_2\$ surrounding Domain \$V\_1, V\_2\$.

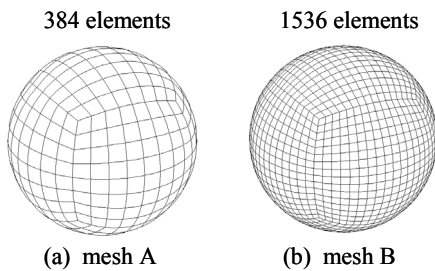


図7 トナー球面のメッシュ分割図  
Fig. 7 Finite element mesh on the spherical toner surface.

\$V\_2\$ を結合する境界面 \$S\_2\$ 上(結合境界)ではポテンシャル \$u\_j\$, 流束 \$q\_j\$ ともに未知数となるが, 一方の領域と他方の領域のそれぞれで境界積分方程式が得られるので, 未知数の数と方程式の数は一致する. したがって結合境界上のポテンシャル, 流束の両方を未知数として含んだ連立1次方程式を作ることができる. この際, \$S\_2\$ 上では静電界の接続条件(式(5)(6))を考慮する. なお, 図6の \$\mathbf{n}\_1\$ と \$\mathbf{n}\_2\$ は領域 \$V\_1\$ を囲む2つの境界上のある位置での外向き法線ベクトルを表示している.

トナー表面上の電荷が作る静電界を計算する場合, 図6の境界面 \$S\_2\$ をトナー表面, \$S\_1\$ を無限境界として, \$\epsilon\_1 = \epsilon\_0\$ (真空の誘電率), \$\epsilon\_2\$ をトナーの誘電率(比誘電率=3)として計算する. なお, トナー表面上の電荷分布は離散化した節点上に任意に与えることができる.

3.2 トナー間付着力の計算結果

2つの球形トナー間の静電的付着力の計算を行った. 付着力は多重極展開のときと同様にトナー球面上の Maxwell の応力を算出することで求める. また, トナー球面のメッシュ分割(離散化)は図7に示すような2種類を用いた. 直径 \$8 \mu\text{m}\$ の球面では, 要素長は mesh A の場合で \$0.78 \mu\text{m}\$, mesh B の場合で \$0.39 \mu\text{m}\$ となる.

3.2.1 多重極展開の方法による計算結果との比較

まず, 式(21)で表わされる軸対称の表面電荷分布の場合で, 多重極展開の方法による計算結果と比較して計算精度の検証を行った.

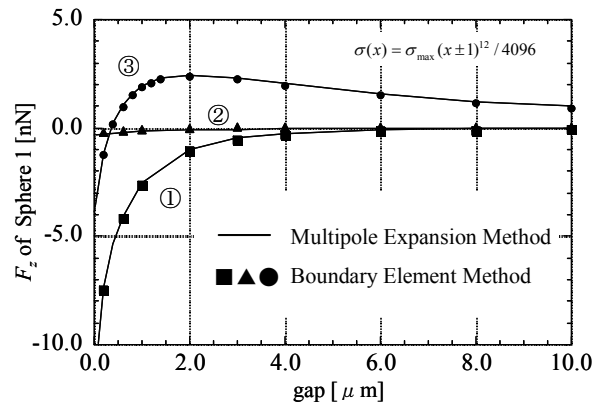


図8 2つのトナー間の静電気力(軸対称電荷分布)  
Fig. 8 Electrostatic force of two toner particles.

図4中の計算モデルに対して, 図7の(a) mesh Aを用いた境界要素法による計算結果を図8に \$\blacksquare, \blacktriangle, \bullet\$ で示す. また, 多重極展開の方法による計算値も実線で示してあり, 計算モデル③の場合で, およそ5%以内で一致している.

以上の結果から境界要素法による静電界計算およびトナー間付着力計算が十分な精度で行えることが確かめられた. 本計算では結果として, 2つのトナー間隙(gap)が要素長の1/10以上であれば計算精度が保たれた.

3.2.2 局所的な電荷分布の場合の計算結果

トナー表面が局所的に帯電している場合では, トナー1個分の電荷量を複数の帯電箇所に分ける. \$Q/M\$ は \$15 \mu\text{C/g}\$ とした. 具体的には, トナー球面上が均等に帯電しているとして, 球面に内接する正多面体を考えてその頂点周辺に一定の面電荷密度 \$\sigma\$ で帯電領域(円で切り取られる球面の一部とする)を与える. \$\sigma\$ の大きさは, トナー球面が一様帯電している場合の値, \$0.22 \times 10^{-4} \text{C/m}^2\$ (\$Q/M = 15 \mu\text{C/g}\$, 径 \$8 \mu\text{m}\$ に相当)より大きく, 原子レベルで平滑な表面の摩擦帯電で得られる実験結果<sup>9)</sup>, およそ \$10^{-2} \text{C/m}^2\$ より小さい. 本研究では試みに \$\sigma = 10^{-3}\$, または \$10^{-4} \text{C/m}^2\$ とした.

図9はトナー球面上に面電荷密度 \$\sigma = 10^{-4} \text{C/m}^2\$ で局所電荷を4-20カ所(正4, 6, 8, 12, 20面体頂点周辺)与えた場合を表わしている. 全帯電面積はトナー表面積の22%になる. このようなトナー2つが近づくとき, 互いの局所電荷が対向しているときは斥力となるので, 局所電荷と電荷のない部分(樹脂)が対向するようにどちらかのトナーが回転して斥力を緩和すると考えられる. そしてその際に局所電荷と対向する樹脂の部分は誘電分極して引力が生じる. そこで, このような電荷配置の2つのトナー間の静電気力を計算した.

図10(a)は面電荷密度 \$\sigma = 10^{-3} \text{C/m}^2\$ の4カ所の局所電荷を持つ上下2つのトナーについて, それぞれの電荷配置を示したもので, 図10(b)は6カ所の場合である. どちらも上側

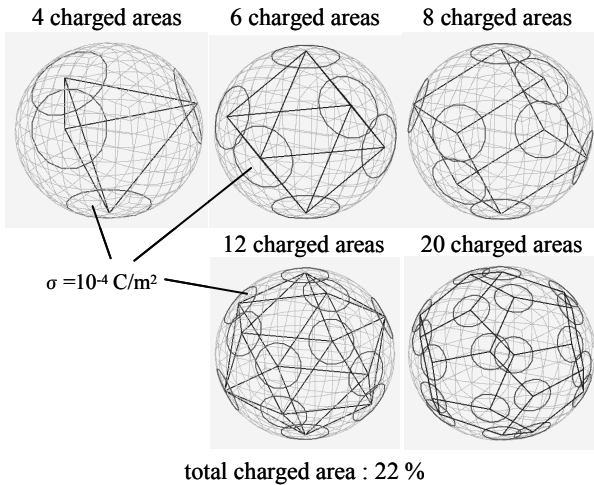


図9 トナー球面上の電荷分布モデル  
Fig. 9 Charge distribution model on the spherical toner surface.

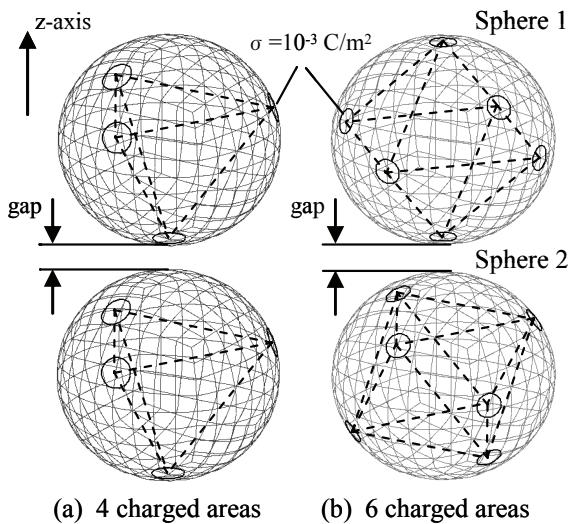


図10 近接する2つのトナーの電荷配置  
Fig. 10 Configuration of charge patch on two spherical toner surfaces close to each other.

トナー (球1) の最下点に1つの局所電荷が配置されており (正多面体の1つの頂点), 下側トナーの最上点には電荷のないトナー樹脂の部分が位置し, 上側トナーの局所電荷と対向している (正多面体の正多角形中心に対向). このような電荷配置のとき最も引力が働き易い. その他の場合も同様な電荷配置として  $0.05 < \text{gap} < 5 \mu\text{m}$  の範囲で計算した. 計算時間は mesh A の場合で1分, mesh B の場合は60分程度 (CPU: Intel Xeon W5590 QuadCore 3.33 GHz  $\times$  2) であった.

面電荷密度  $\sigma = 10^{-3}, 10^{-4} \text{ C/m}^2$  で4, 6個の局所電荷の場合のトナー間に働く力の計算結果を図11に示す. 球1 (上側トナー) に働くz方向の力  $F_z$  を示しており, 正ならば2つのトナー間に斥力が働いており負ならば引力となる. な

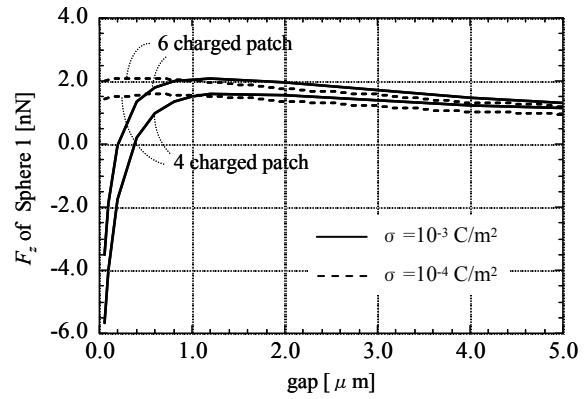


図11 2つのトナー間の静電気力 (4, 6カ所帯電)  
Fig. 11 Electrostatic force of two toner particles (4, 6 charged patch).

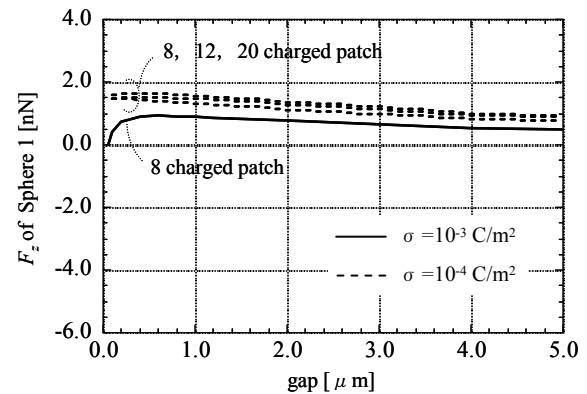


図12 2つのトナー間の静電気力 (8, 12, 20カ所帯電)  
Fig. 12 Electrostatic force of two toner particles (8, 12, 20 charged patch).

お, 図10(b)に示した計算モデルでは帯電部の面積が要素に比べて十分に大きくないので, 図7(b)の mesh Bを用いた.

図11では,  $\sigma = 10^{-3} \text{ C/m}^2$  で4, 6個の局所電荷のとき, それぞれ  $\text{gap} < 0.4, 0.2 \mu\text{m}$  で引力になっている. この場合, 2つのトナーは外部静電界 (トナーを現像するためのバイアス電界など) によって  $\text{gap} < 0.4, 0.2 \mu\text{m}$  まで近づけば引力となり, その後は凝集したまま感光体上に保持されることがわかる. 一方,  $\sigma = 10^{-4} \text{ C/m}^2$  の場合は斥力しか働かず,  $\text{gap} \rightarrow 0$  でも引力にならないと予想される. 図12は  $\sigma = 10^{-3} \text{ C/m}^2$  で8個の局所電荷を持つ場合と  $\sigma = 10^{-4} \text{ C/m}^2$  で8, 12, 20個の場合の付着力の計算結果を示したものであるが, いずれも  $\text{gap} > 0.05 \mu\text{m}$  の範囲では引力にはなっていない.

以上の結果から, トナーの電荷量が同じでも表面上の電荷分布の違いにより gap の小さいところで引力になる場合と斥力しか働かない場合があり, 面電荷がより局在して集中している場合に引力になり易いことがわかる.

### 3.3 トナーと接地平面間の付着力の計算結果

トナーと接地平面との付着力は遠心分離機を用いた方法などで計測されており<sup>10)</sup>, その結果は平均値で10-100 nN

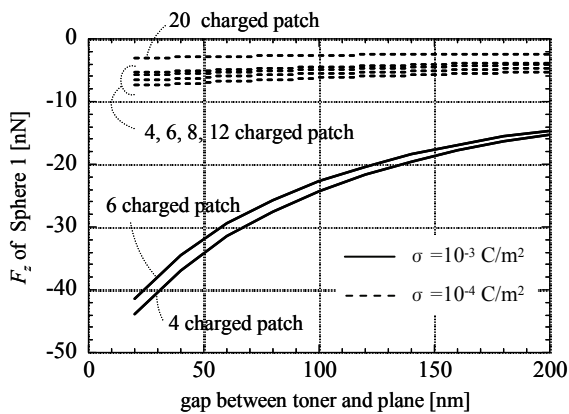


図13 トナーと接地平面間の静電気力

Fig. 13 Electrostatic force of toner to grounded plane.

程度で2-3桁の分布がある。これを確かめるため、 $Q/M = 15 \mu\text{C/g}$ として図9と図10で示した電荷分布の場合について付着力を計算した。トナーと接地平面間の付着力は、鏡像を考慮することで2つのトナー間付着力と同等になる。すなわち、接地平面を鏡像面として球2（下側トナー）上の電荷を鏡像面に対して球1（上側トナー）上の電荷と対称の位置に配置して、球1には正電荷、球2には負電荷を与えて静電界計算を行う。このときの2つのトナー球の間隙はトナーと接地平面との間隙（gap）の2倍に相当する。実際のトナー表面の凹凸を考慮してトナーと接地平面との間隙（gap）は20-200 nmまで変化させた。計算結果を図13に示す。

$\sigma = 10^{-3} \text{ C/m}^2$ で4, 6個の局所電荷の場合、 $\text{gap} = 20 \text{ nm}$ での付着力はおおよそ40 nNであり、実測値と同じオーダーになっている。一方、 $\sigma = 10^{-4} \text{ C/m}^2$ で20個の場合は2 nNとなり1/20程度の大きさである。

トナーはキャリア粒子との混合攪拌により摩擦帯電するため、表面の局所的な面電荷密度、帯電面積ともばらつきを持つ。その結果として実際にトナー1個の帯電量自体がばらついている。また、表面凹凸によりgapも20-100 nm程度に変化し得る。

局所電荷を点電荷 $Q_p$ （ $\sigma \times$  帯電部面積）と近似すれば、それによる付着力はほぼ $Q_p^2 / (2 \times \text{gap})^2$ に比例すると考えられるので、 $Q_p$ , gapがともに5倍のバラツキがあるとすれば、付着力は625倍の差を生じることになる。すなわち、付着力の実測で得られる2-3桁の分布を説明し得る。

以上では局所的な帯電部分に連続的な面電荷密度 $\sigma$ を与えて静電気力を計算してきたが、トナー表面は1個のイオン、または1個の電子が離散的に分布していると考えられる。そこで、 $\sigma = 10^{-3}, 10^{-4} \text{ C/m}^2$ を電気素量 $e$ の1個が占める面積として換算するとそれぞれ1個/(12.6 nm)<sup>2</sup>, 1個/(40.0 nm)<sup>2</sup>に相当する。したがってgapがさらに小さい場合は連

続的な電荷分布ではなく、離散的な点電荷 $e$ の分布として静電界を計算する必要がある。トナーの比誘電率を1とすれば静電気力は点電荷間のCoulomb力の重ね合わせとして簡単に計算できるので、面電荷密度を与える場合とどの程度の差異になるか4個の局所電荷の場合で計算し比較した。トナーと接地平面との $\text{gap} > 20 \text{ nm}$ では $\sigma = 10^{-3}, 10^{-4} \text{ C/m}^2$ の場合、それぞれおおよそ10%, 8%以下の差異であった。したがって、本計算例では連続的な面電荷密度の扱いが可能である。

#### 4. まとめ

多重極展開の方法と境界要素法を用いて、表面上に局所的に帯電した2つの球形トナー間に働く静電気力を解析した。その結果、同極性トナー間でも電荷分布によっては間隙の小さいところで誘電分極により引力が働くことがわかった。また、トナーと接地平面との付着力の解析結果は実測値を説明できた。以上から、トナー表面の電荷が局所的に分布しているために静電的な付着力が生じることが確認できた。トナーはキャリア粒子との混合攪拌により摩擦帯電するため、表面の電荷分布のバラツキが大きいと考えられる。今後、実際のトナー表面の電荷分布計測結果をもとに様々な表面電荷分布に対してトナー間の静電的付着力を調べる必要がある。

#### 参考文献

- 1) 栗林夏城, 門永雅史: Imaging Conference Japan 2009 論文集, p.79, 日本画像学会 (2009)
- 2) D. A. Hays: J. Adhesion, **51** (1995) 41
- 3) 飯村治雄: Ricoh Technical Report, No.26 (2000) 34
- 4) M. Washizu and T.B. Jones: IEEE Trans. Ind. Appl., **32** (1996) 233
- 5) 中島耀二, 松山 達: 静電気学会誌, **25** (2001) 215
- 6) B. Techaumnat and T. Takuma: IEEE Trans. DEI, **10** (2003) 623
- 7) 田中正隆, 松本敏郎, 中村正行: 計算力学とCAEシリーズ2 境界要素法, 培風館 (1991)
- 8) M. Koizumi and M. Utamura: *Boundary Elements VIII Proc. of 8th Int. Conf.*, eds M.Tanaka and C.A.Brebbia, p.665, Springer Verlag, New York (1986)
- 9) R.G. Horn and D.T. Smith: Science, **256** (1992) 362
- 10) 福地 裕, 野口健一, 竹内 学, 保志信義, 小島亮二: Japan Hardcopy 97 論文集, p.81, 日本画像学会 (1997)